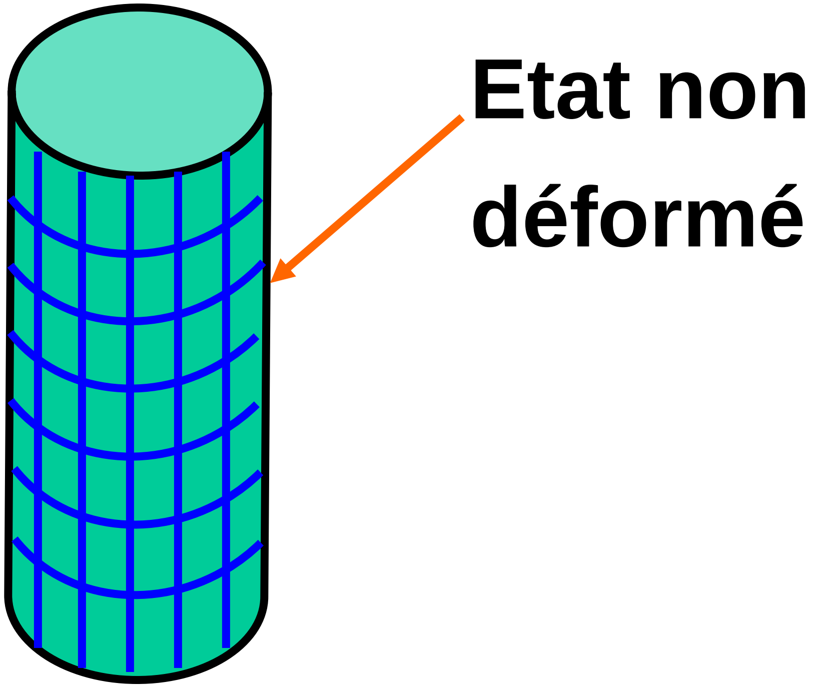
Chapitre IV

TORSION

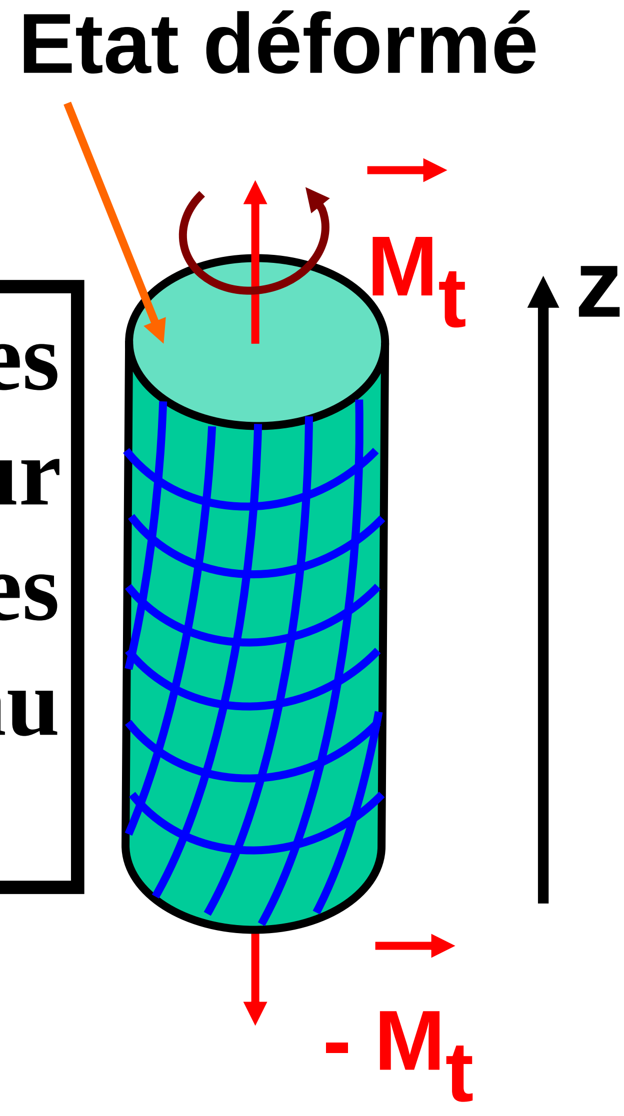
I Expérience

Etudions l'effet d'un essai de torsion sur un rouleau en caoutchouc en appliquant à ses extrémités deux couples égaux et opposés.

Pour illustrer la déformation de ce matériau, on réalise sur sa surface un tracé sous forme d'un treillis de lignes orthogonales comme le montre la figure ci-contre.



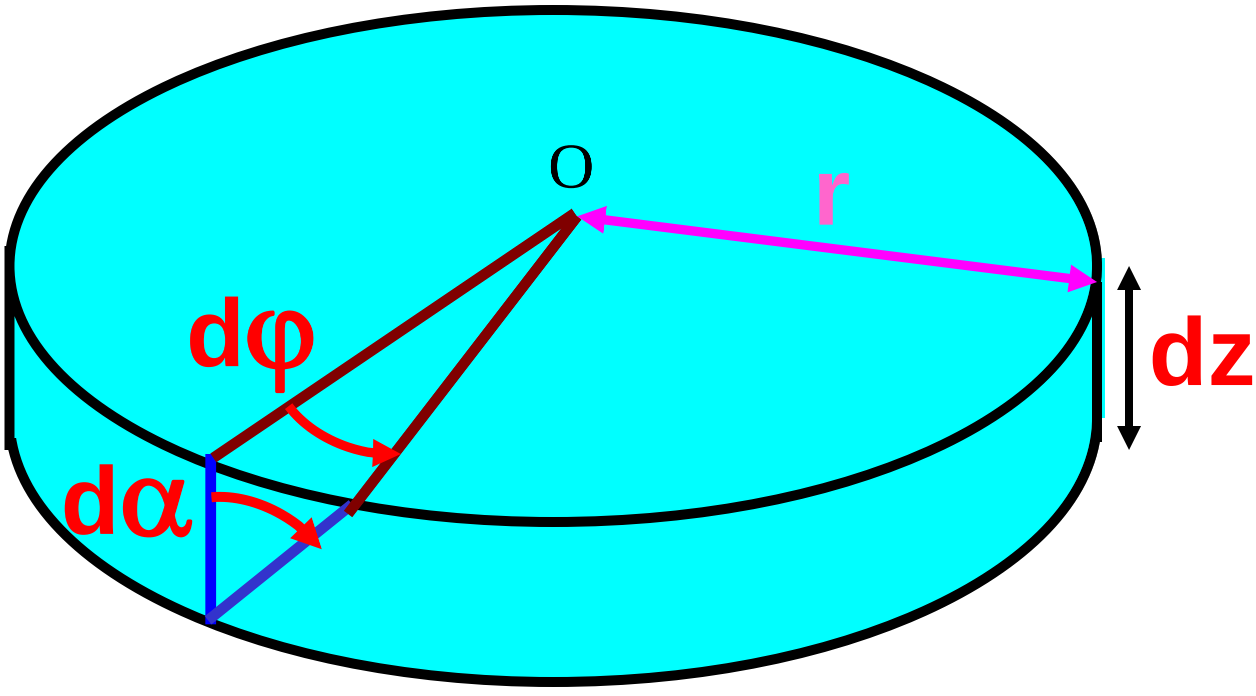
Après déformation, les lignes circulaires conservent leur forme, tandis que les lignes parallèles à l'axe du rouleau deviennent hélicoïdales.



II Torsion-cisaillement

La torsion du rouleau induit un cisaillement. En effet, dans le cas des petites déformations, les sections voisines glissent l’une par rapport à l’autre. Les contraintes sont donc tangentielles sur chaque section transversale (contraintes de cisaillement).

Considérons deux sections voisines séparées distantes de dz.



dα : angle de cisaillement (dα ≡ γ).

dφ : angle de torsion.

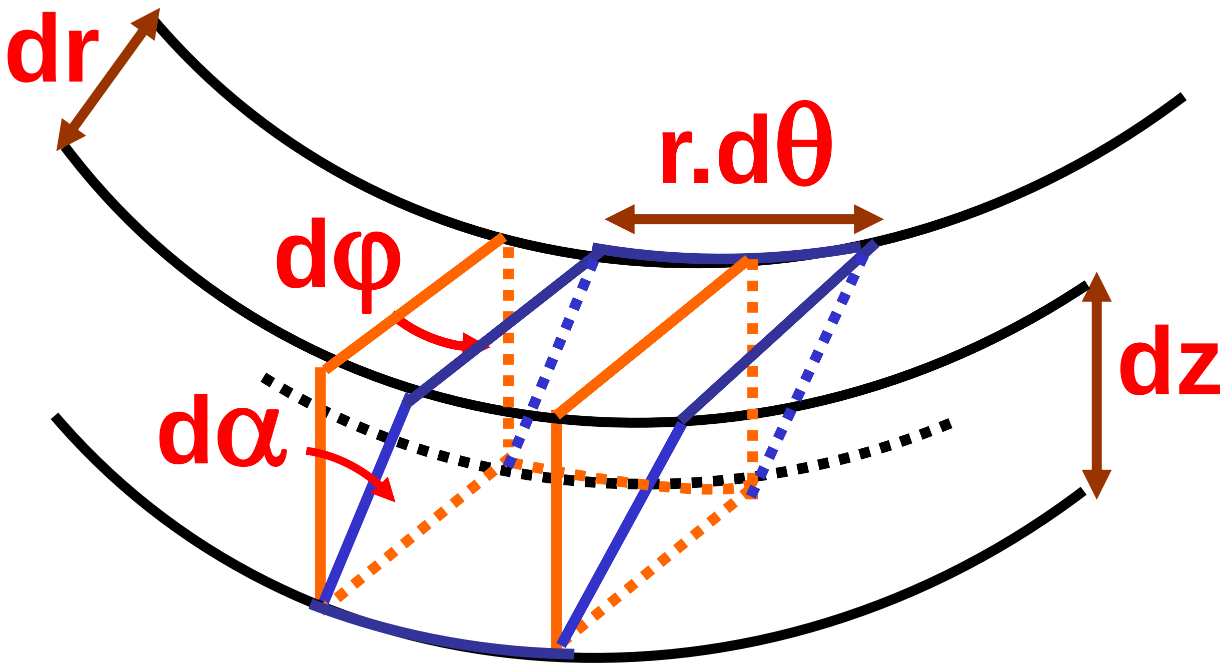
☞ $$\boxed{\tan(\mathrm{d}\alpha) \approx \mathrm{d}\alpha = \gamma = \mathrm{r}\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dz}}}$$

Remarque : D'après la relation précédente, les angles dα et dφ doivent être exprimés en radians.

III Contrainte de cisaillement

Le déplacement tangentiel de la face supérieure du disque mince par rapport à la face inférieure et à une distance r donnée, est : $r d\varphi$.

Considérons, dans ce disque mince (car dz <<1), un petit cube comme le montre la figure ci-dessous.



La surface supérieure du cube élémentaire est : dS = rdrdθ.

La contrainte de cisaillement s'écrit :

☞ $$\tau = G\,\gamma \approx G\,d\alpha = Gr\frac{d\varphi}{dz}$$

Pour un matériau homogène l’angle de torsion varie linéairement en fonction de z.

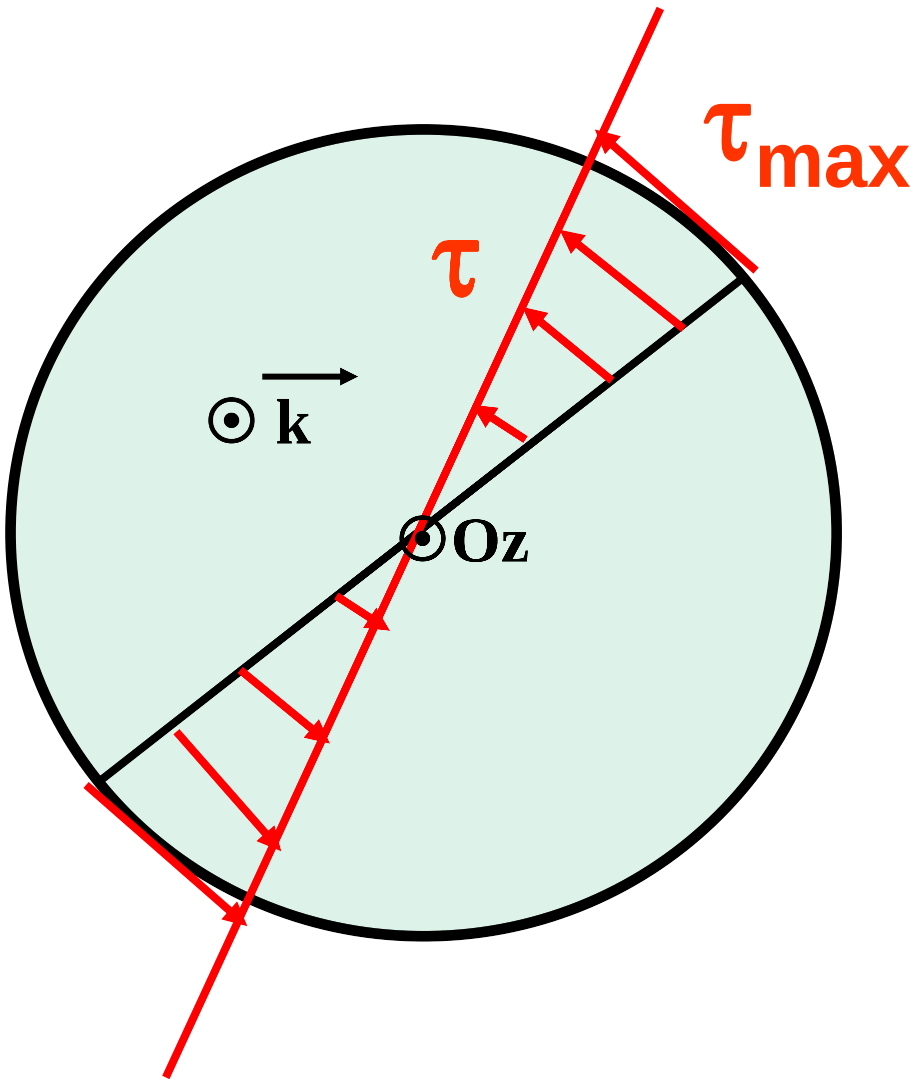
$$\boxed{\frac{d\varphi}{dz} = cte = \frac{\varphi(L) - \varphi(0)}{L}}$$

Dans ce cas, la contrainte de cisaillement varie linéairement en fonction de r et atteint sa valeur maximale sur le contour du rouleau.

☞ $$\boxed{\tau = Cr}$$

avec

$$\boxed{C = G\frac{d\varphi}{dz} = G\frac{\varphi(L) - \varphi(0)}{L}}$$



τ_{max}
τ
k
Oz

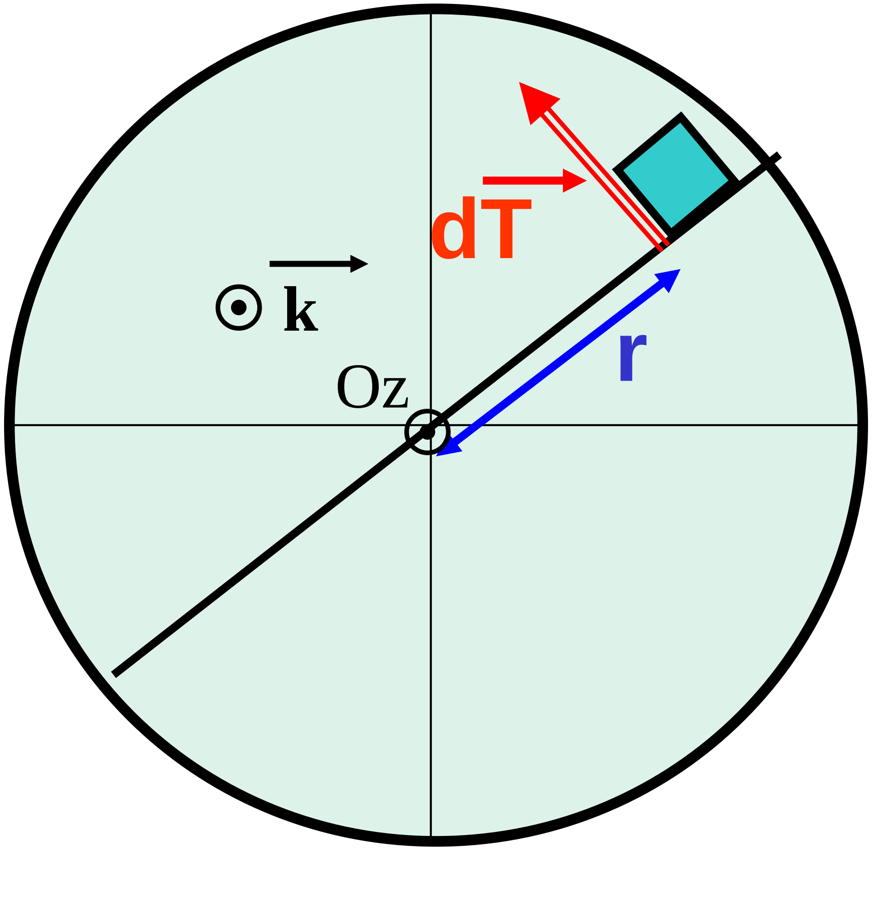
IV Moment de torsion

La force élémentaire de cisaillement est donnée par :

☞ $$\boxed{dT = \tau\, dS = G\frac{d\varphi}{dz}.r^2 dr d\theta}$$

car

$$\boxed{\tau = Gr\frac{d\varphi}{dz} \text{ et } dS = r dr d\theta}$$



dT
k
Oz
r

Le moment de torsion total qui s'exerce sur la section transversale est :

☞

$$M_t = \int_S r\tau \, dS = G \frac{d\varphi}{dz} \int_S r^2 \, dS$$

La quantité positive définie par :

☞ $$\boxed{I_{Oz} = \int_S r^2 \, dS}$$

est Le moment quadratique de la section par rapport à son axe Oz.

$$I_{Oz} = \int_{r=0}^{R} r^3 dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$$

R et D sont respectivement le rayon et le diamètre du rouleau d'essai.

Comme le moment de torsion est uniforme le long du rouleau alors nous avons :

☞ $$\boxed{M_t = \int_S r\,\tau\,dS = G I_{Oz}\,\frac{\varphi(L) - \varphi(0)}{L} = M_{ext}(L)}$$

☞ $$\boxed{\frac{M_t}{I_{Oz}} = \frac{\tau}{r} = G\,\frac{\varphi(L) - \varphi(0)}{L}}$$

V Condition de résistance

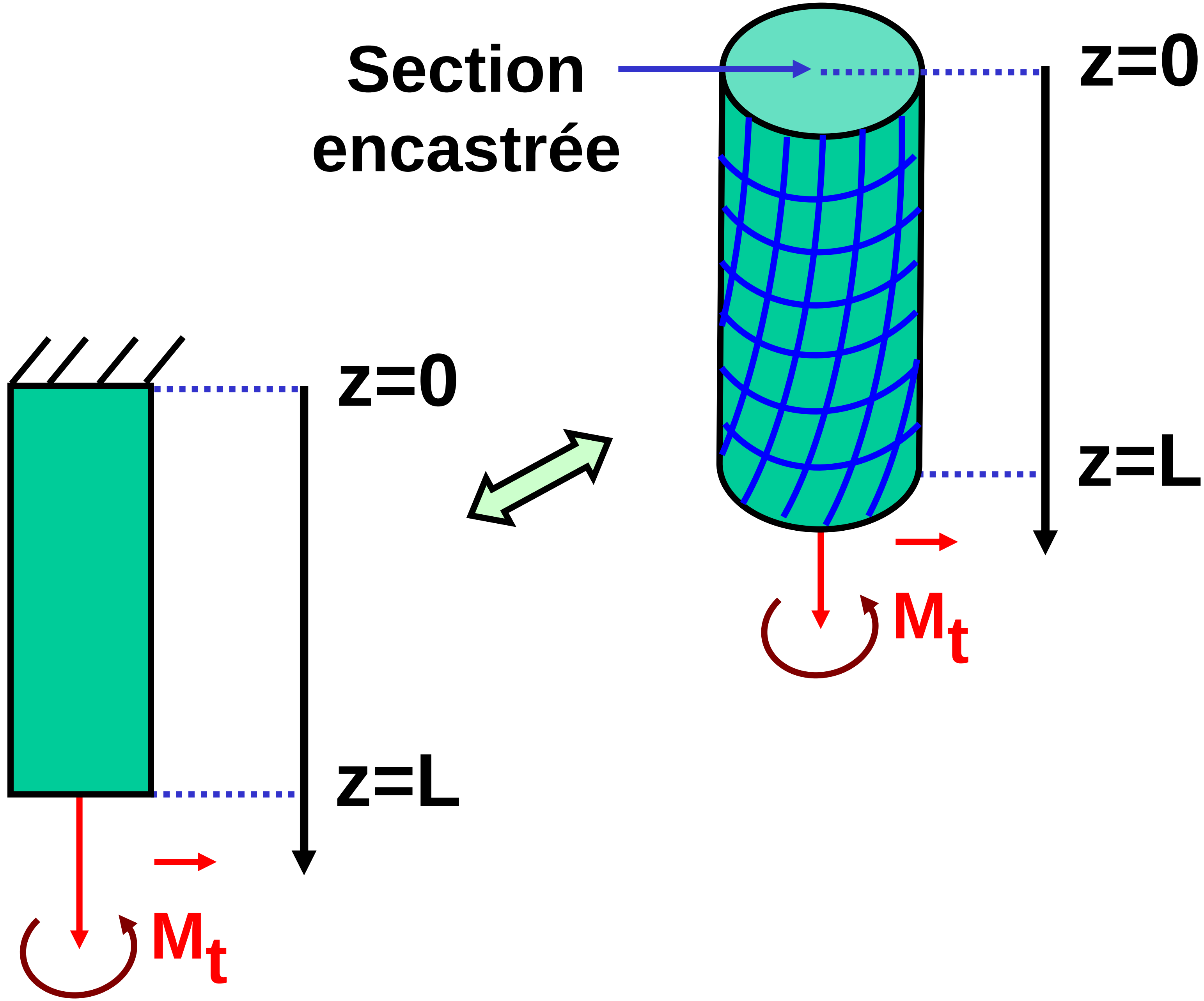
On considère en pratique la limite élastique admissible τ_{maxi}. La condition est donnée par :

☞
$$\tau_{maxi} \leq \frac{\tau_{limite}}{\alpha}$$

avec
$$\tau_{maxi} = \frac{M_t r_{maxi}}{I_{Oz}}$$

Exercice 1

Une éprouvette cylindrique en cuivre, de 2,5 cm de diamètre et de 1 m de longueur, est soumise à un couple de torsion de 210 Nm comme le montre la figure. Calculer le module d'élasticité transversale du cuivre testé sachant que l 'angle de torsion à l'extrémité chargée est de 4,9 degrés.


Section
encastrée
z=0
z=L
z=0
z=L
M_t
M_t

Exercice 2

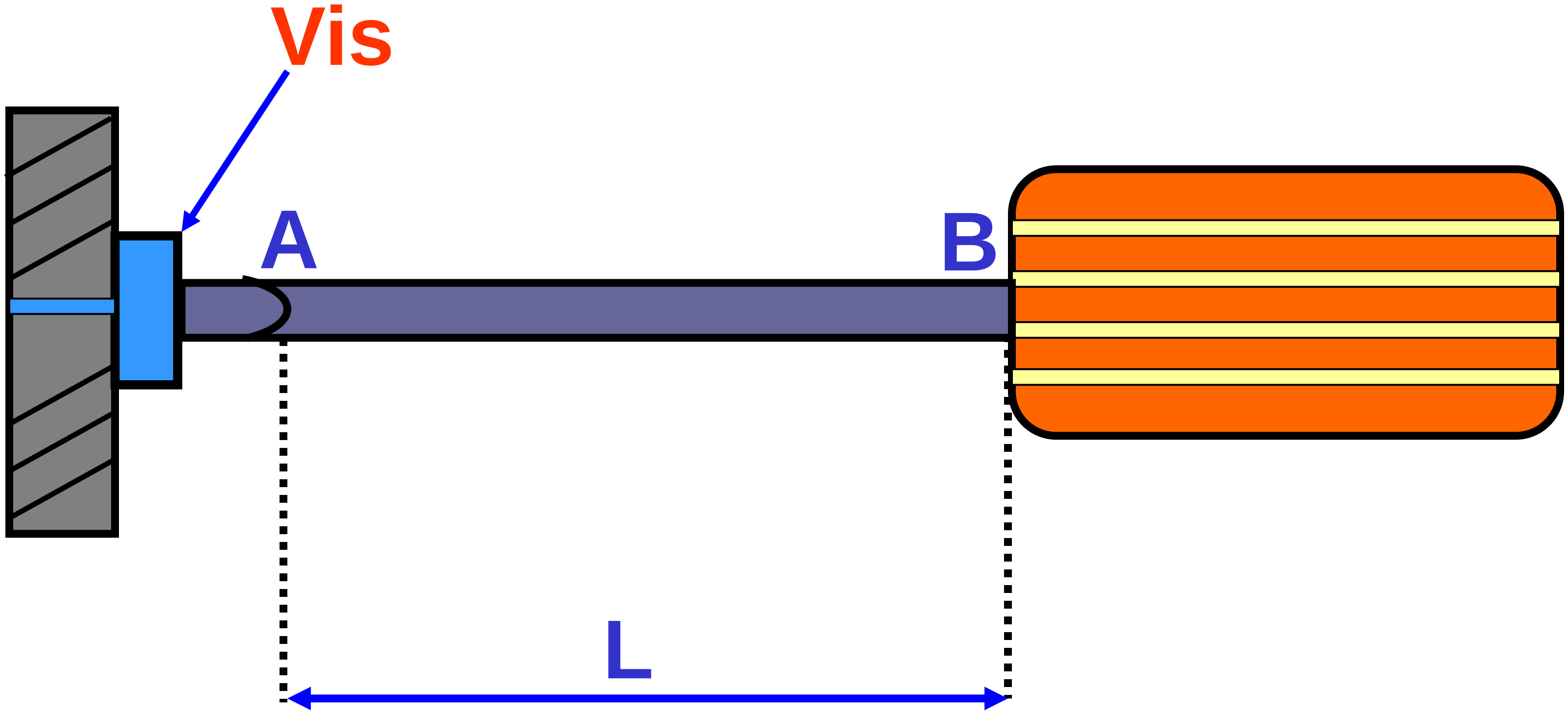
En reprenant les données de l'exercice précédent, calculer la contrainte de cisaillement maximale.

Exercice 3

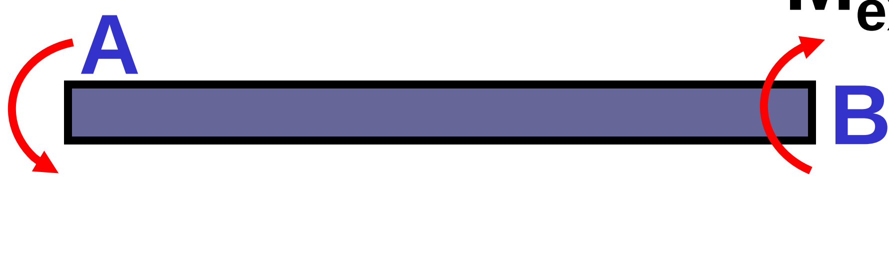
Un tournevis est soumis à un moment de torsion M_{ext} = 210 Nm comme le montre la figure. Le tronçon métallique AB à une longueur L=200 mm et un diamètre d=7 mm. Sachant que l'angle de torsion est $\varphi(B)=14{,}9°$ (avec $\varphi(A)=0°$)

1) Calculer le module de cisaillement G de la tige métallique.

2) Déduire la contrainte de cisaillement maximale.



$$M_{ext} = M_B = -\,M_A$$



V Concentration des contraintes

Si la pièce cylindrique (arbre de transmission, outil ou autres) présente une brusque variation de section (gorge, rainure, épaulement etc.) ou bien que la pièce n'est plus cylindrique, alors la relation donnant l'expression de la contrainte maximale n'est plus valable à cause de la concentration des contraintes.

$$\tau_{max} = G\, r_{max} \cdot \frac{d\varphi}{dz} \xcancel{= \frac{M_t\, r_{max}}{I_{Oz}}} \quad ; r_{max} = \frac{d}{2}$$

L expérience montre, dans ce cas, que la contrainte maximale est donnée par la formule :

$$\tau'_{max} = k.\tau_{max} \quad ; \; \text{où } \tau_{max} = \frac{M_t\, r_{max}}{I_{Oz}}$$

k est le coefficient de concentration de contrainte.