

Chapitre II

NOTIONS DE BASE

I Introduction

1) Qu'est-ce que la R.D.M.

La résistance mécanique des matériaux (R.D.M.), concerne leurs aptitudes à supporter les efforts extérieures auxquelles ils sont soumis (traction, compression, cisaillement, flexion, etc...)

2) But de la R.D.M.

Le **but** de la **R.D.M.** est d'assurer qu'on utilise, dans une pièce donnée une **quantité minimale de matériau**, tout en satisfaisant aux exigences suivantes :

Résistance - Rigidité - Stabilité
Endurance - Résilience

a - Résistance

La pièce doit pouvoir supporter et transmettre les charges externes qui lui sont imposées.

b - Rigidité

Lorsqu'elle est sollicitée, la pièce ne doit pas subir de déformations excessives (E.L.S.).

c - Stabilité

La pièce doit conserver son **intégrité géométrique** afin d'éviter les conditions d'instabilités (**flambement**).

d - Endurance

Si elle est soumise à un chargement répété, la pièce doit **tolérer sans rupture** un certain nombre de cycles de **sollicitations variables** (fatigue des matériaux).

e - Résilience

Dans le cas ou un chargement dynamique est à prévoir (impact), la pièce doit pouvoir **absorber** une certaine **quantité d'énergie** sans s'en trouver trop endommagé (**résistance au choc**).

II Hypothèses de base

Ces **hypothèses** permettent de **réduire la complexité** des développements mathématiques tout en conservant une certaine généralité. Ces hypothèses de base concernent la **continuité**, l'**homogénéité**, l'**isotropie**, les **déformations** et les **forces internes** du matériau étudié.

1) Continuité

Le matériau est continue, c'est-à-dire ne comportant **ni fissures ni cavités**.

2) Homogénéité

En tout point, le matériau possède les **mêmes propriétés chimiques**. La plupart des matériaux d'ingénierie satisfont à ce critère (à l'échelle macroscopique).

3) Isotropie

Les propriétés physiques sont les mêmes en tout point et dans toutes les directions. La plupart des matériaux sont isotropes à l'échelle macroscopique.

4) Déformations

Les **déformations** ont une **influence négligeable** sur la position des points d'application ou sur la direction des forces extérieures.

5) Forces internes




Aucune **force interne** n'agit dans le matériau avant l'application des charges externes (**état initial**).

6) Remarque


Les forces internes, dites **résiduelles** sont souvent présentes dans les matériaux. Elle résultent en général du **processus de fabrication** (pliage, soudage, etc...). On tient compte de ces forces résiduelles en diminuant la force trouvée ou en augmentant le section (On prend une certaine **sécurité**).

III Méthode de résolution

On **résout** un problème de R.D.M. selon une démarche systématique qui comporte **trois étapes fondamentales** :

-  l'étude des forces et des conditions d'équilibre;
-  l'étude des déplacements et de la compatibilité géométrique;
-  l'application des relations forces-déformations (E.L.S.).

1) Forces et les conditions d'équilibre


$$[T]_O = \begin{cases} \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_{\vec{F}_{\text{ext}}/O} = \vec{0} \end{cases}$$

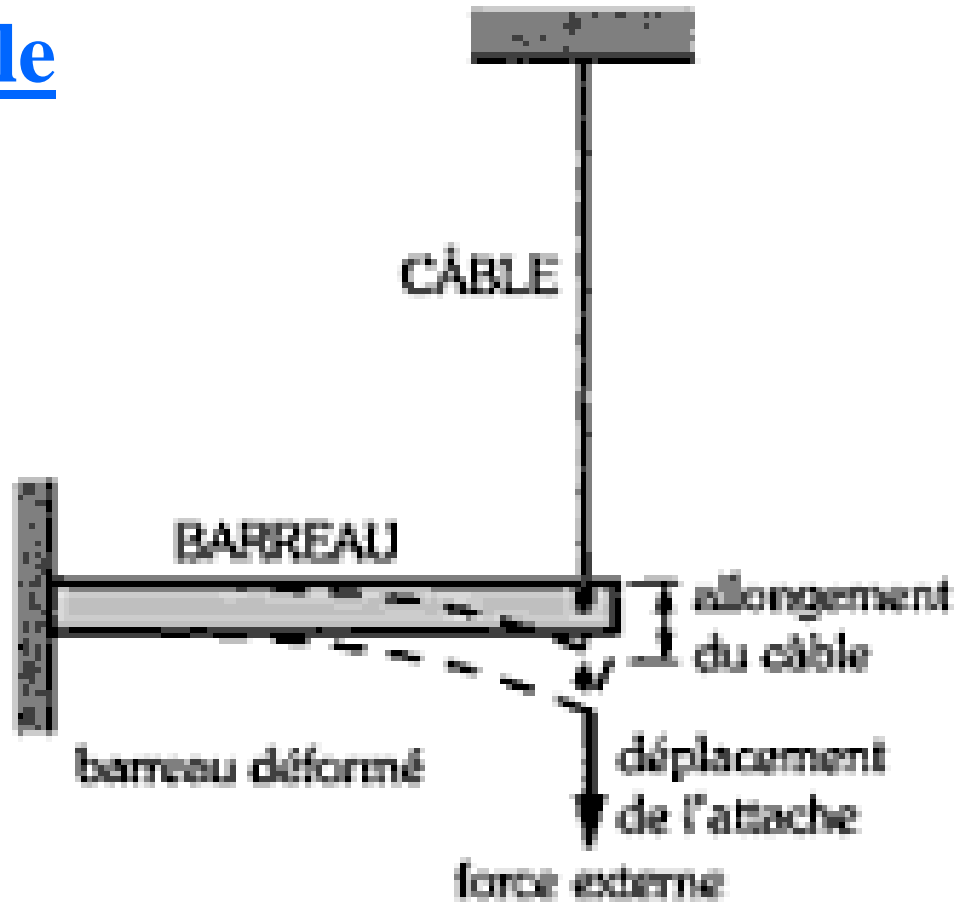
O est un point quelconque

Possibilité d'obtenir jusqu'à **six équations**

2) Déplacements et compatibilité géométrique

Une structure conserve sa **continuité** et son **intégrité** après avoir été déformée sous l'action des charges externes ou celle de variations de température. Il est donc nécessaire d'**étudier les déformations** que subit chacun des composants de la structure et d'examiner les déplacements qui en résultent.

Exemple



Notions de **compatibilité géométrique**

3) Relations forces-déformations

Avec l'application de ces relations (**relations constitutives**), nous faisons intervenir les **propriétés du matériau** et nous relient les forces étudiées à la première étape de résolution aux déformations analysées à la seconde étape.

IV Contrainte

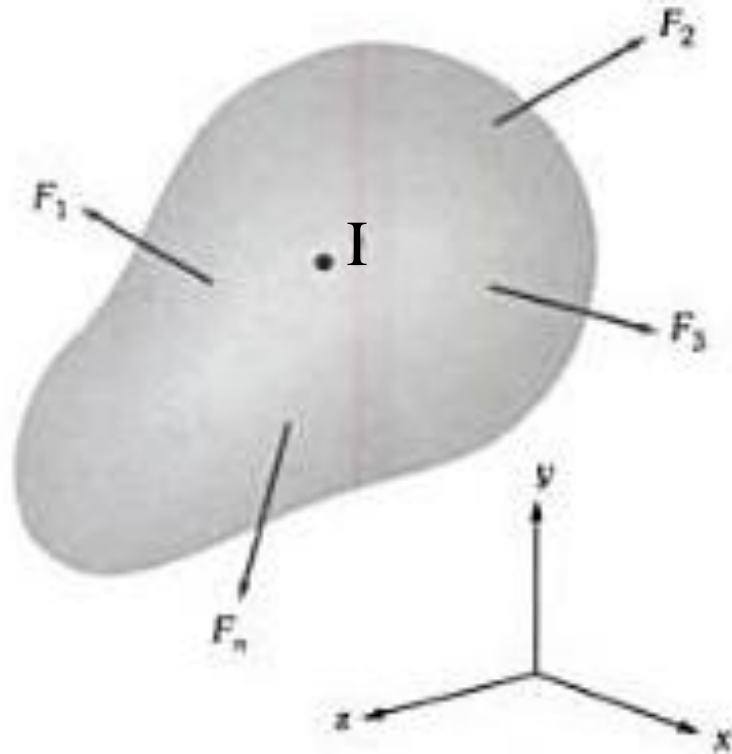
1) Forces internes

Les **forces internes** prise en compte sont celles due aux sollicitations externes et **capables de déformer** le matériau.

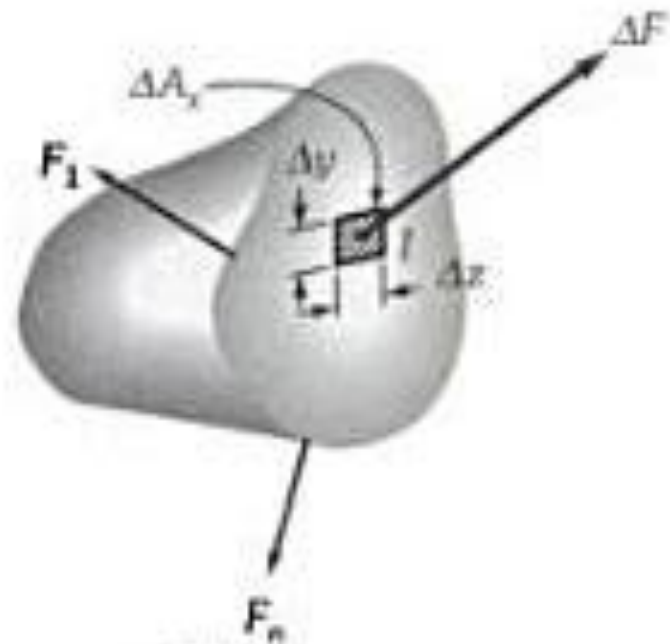
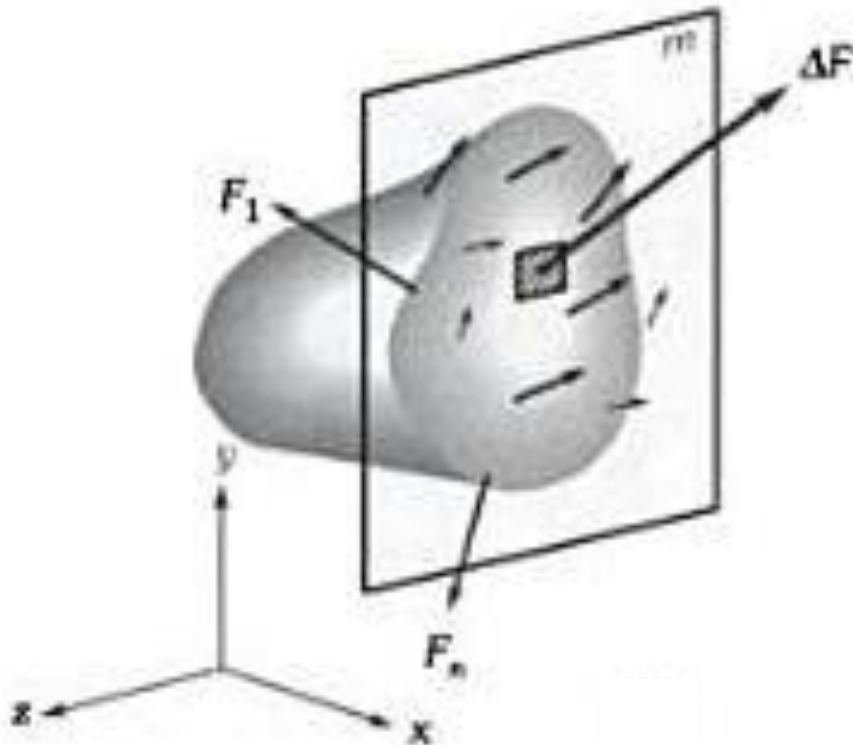
La **R.D.M.** consiste à **dimensionner** le matériau pour qu'il **supporte** l'action des **forces internes** sans se détériorer.

2) Etat des forces internes

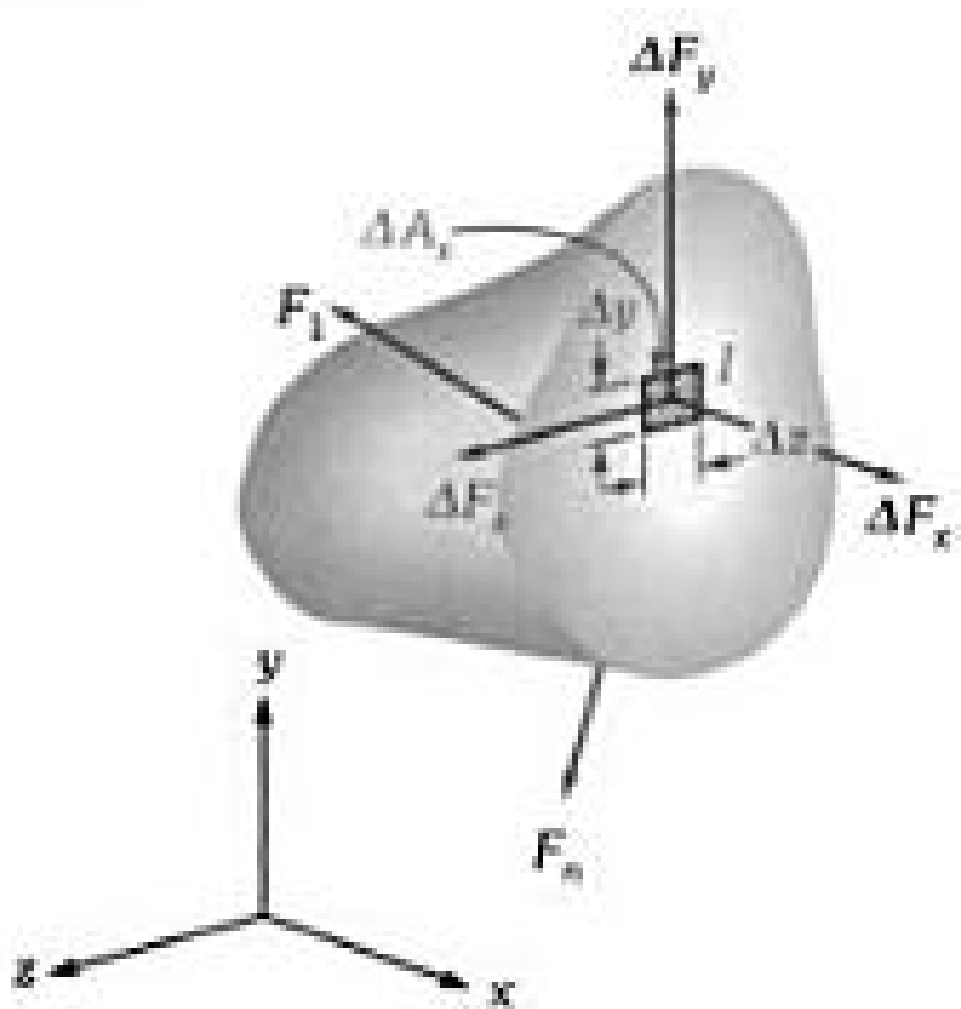
On étudie dans un système d'axes (xyz), le point interne I d'un corps soumis à des forces externes $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$.



Le plan m est normal à l'axe des x et passe par I . **La section** est soumise à des **forces internes** variant en intensités et en direction d'un point à un autre.



Au point I, une **force** d'intensité moyenne $\Delta\vec{F}$ agit sur l 'élément de surface ΔA_x .



$$\Delta\vec{F} = \Delta\vec{F}_x + \Delta\vec{F}_y + \Delta\vec{F}_z$$

$$\Delta A_x = \Delta y \Delta z$$

L'intensité moyenne de chacune de ces **composantes**, par unité de surface est :



$$\frac{\Delta F_x}{\Delta A_x} ; \frac{\Delta F_y}{\Delta A_x} ; \frac{\Delta F_z}{\Delta A_x}$$

$(\Delta F_x / \Delta A_x)$: la force interne agit dans la **direction normale à la face** considérée.

$(\Delta F_y / \Delta A_x$ et $\Delta F_z / \Delta A_x)$: la force interne agit **parallèlement à la face** considérée.

Si ΔA_x tend vers 0, ces trois rapports tendent vers des **limites** qu'on définit comme étant les composantes des **contraintes** qui agissent sur la surface normale à l'axe des x au point I.

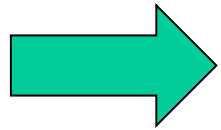
3) Etat de contrainte

a - Définition

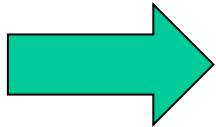
Les sollicitations sont quantifiées par la notion de **contrainte** σ , qui est l'effort surfacique exercé sur une partie de la pièce en un point par le reste de la pièce. σ est homogène à **une pression** et est exprimé en **mégapascal (MPa)** ou en **Newton par millimètre carré (N/mm²)**.

b – Contrainte normale

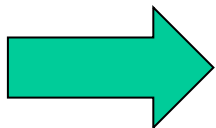
Les contraintes normales notée σ , sont définie par les relations :



$$\sigma_{xx} = \sigma_x = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A_x}$$



$$\sigma_{yy} = \sigma_y = \lim_{\Delta A_y \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A_y}$$



$$\sigma_{zz} = \sigma_z = \lim_{\Delta A_z \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A_z}$$

c – Contrainte de cisaillement

La contrainte de cisaillement ou tangentielle notée τ , est définie par la relation :

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A_x}$$

et

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A_x}$$

$$\tau_{yx} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A_y}$$

et

$$\tau_{yz} = \lim_{\Delta A_y \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A_y}$$

$$\tau_{zx} = \lim_{\Delta A_z \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A_z}$$

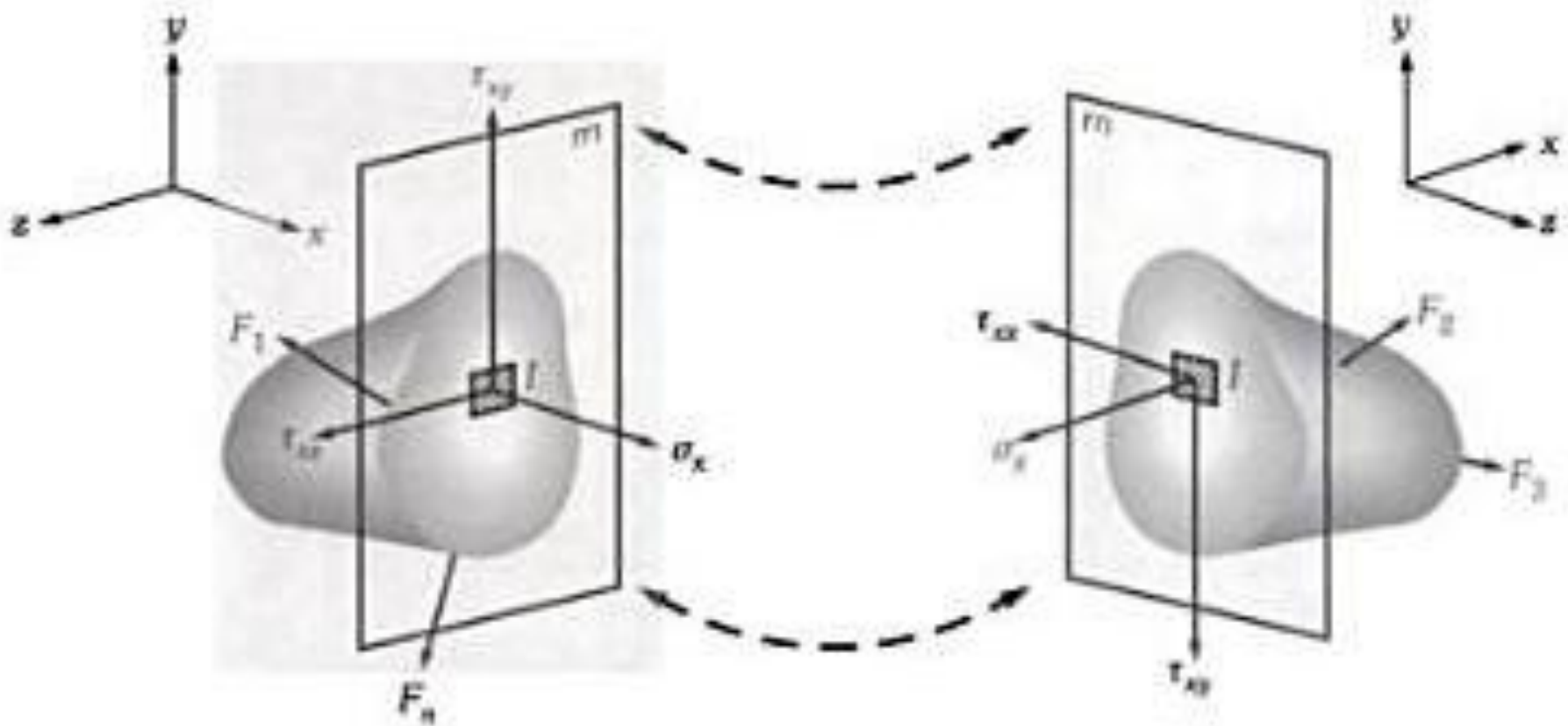
et

$$\tau_{zy} = \lim_{\Delta A_z \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A_z}$$

d – Convention de signe

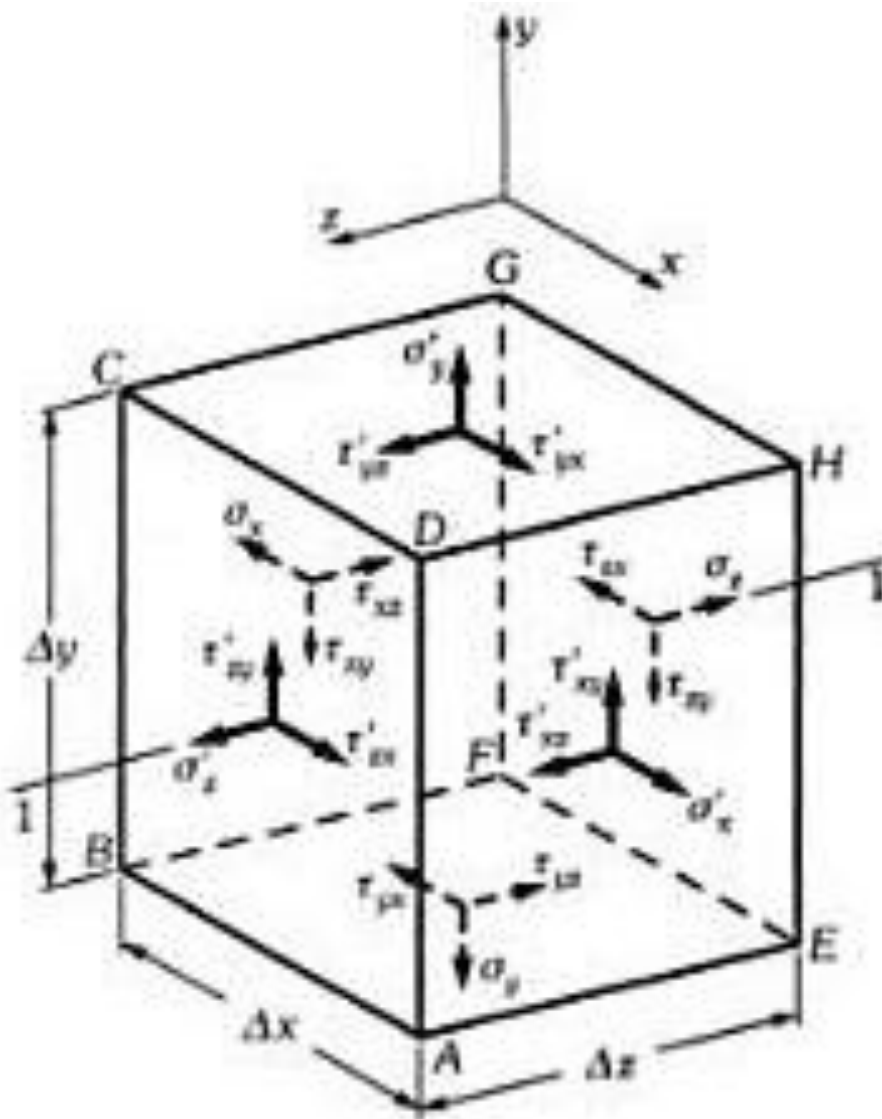
➔ Une **face** est **positive** lorsque sa **normale externe** est dirigée dans le sens **positif d'un axe**.

➔ Une **contrainte** est **positive** lorsqu'elle agit dans le sens **positif d'un axe**, sur une **face positive** ou dans le sens **négatif d'un axe** sur une **face négative**.



Les **mêmes** composantes de contrainte agissent au point I sur la partie droite du corps sectionné (principe de la coupe: **solide en équilibre en deux parties**).

e – Etat de contrainte en un point



Etat de contrainte au point I montrant toutes les composantes de contraintes sur les faces négatives et leurs contreparties (primées) sur les faces positives. Lorsque les dimensions Δx , Δy et Δz de l'élément tendent vers zéro, la valeur des composantes primées tend vers celle de leurs contrepartie non primées.

f – Réciprocité

Les **relations** qui régissent les **contraintes de cisaillement** sont les suivantes :

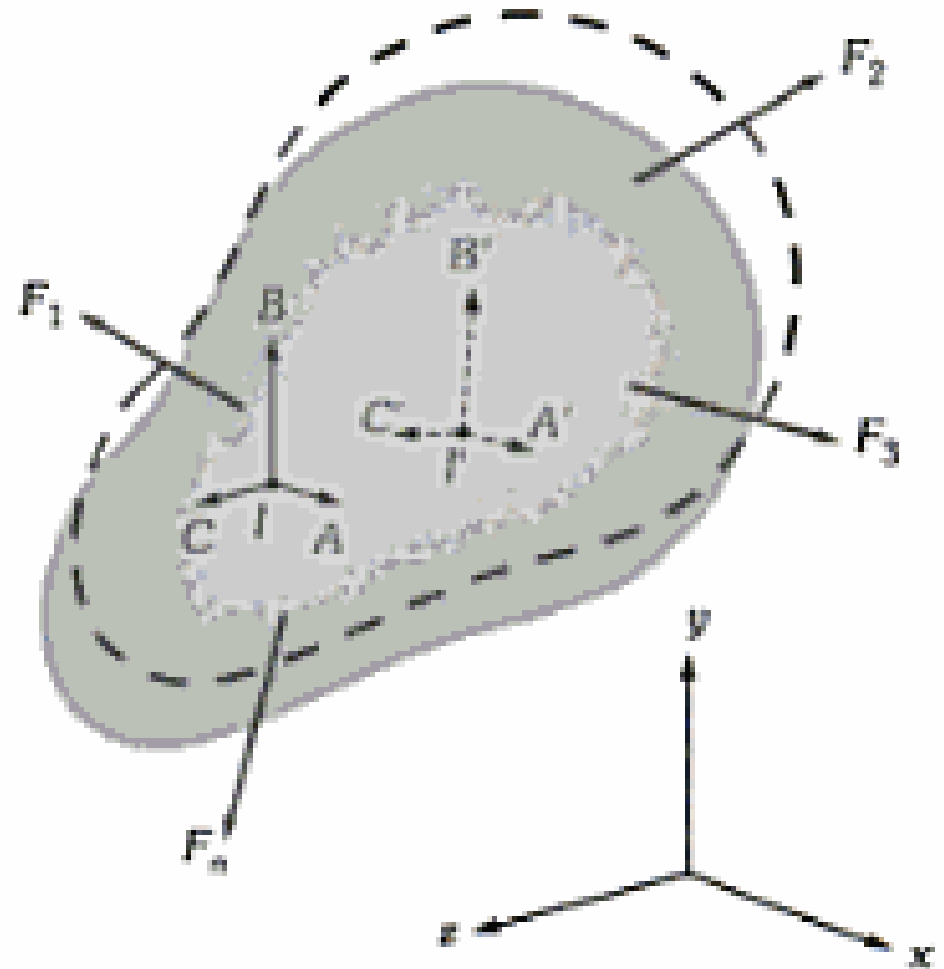


$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}; \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

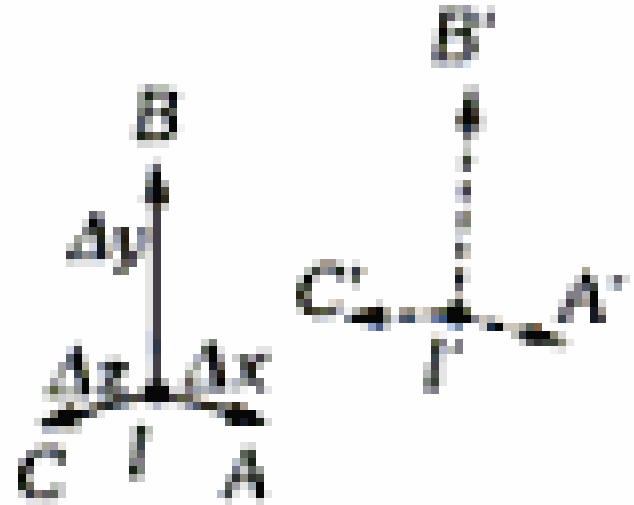
V Déformation

1) Présentation

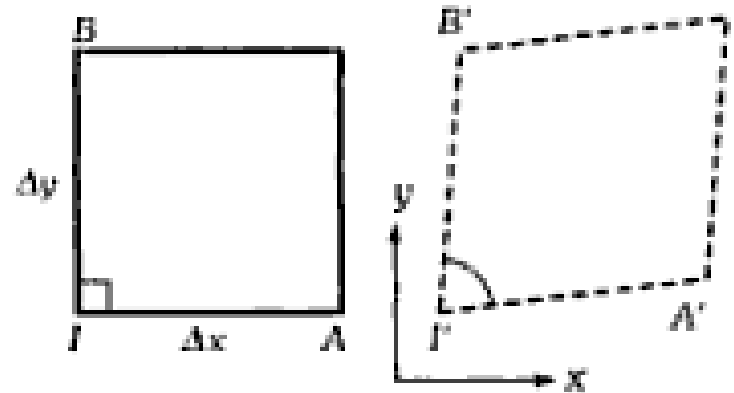
Sous l'action des **forces externes** et des **variations de température**, le **corps se déforme** : le point I se déplace en I', le point A en A', le point B en B' et le point C en C'.



Trois éléments parallèles aux axes de référence **avant déformation** ; leur position relative et leur longueur **après déformation**.



Les **angles** entre les **segments de référence** ne sont plus les mêmes.



2) Déformation normale

La **déformation normale** notée ε est le quotient de la variation de longueur par la longueur initiale, lorsque celle-ci tend vers zéro.

Les trois déformations normales :

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{I'A' - IA}{IA}$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{I'B' - IB}{IB}$$

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_z = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{I'C' - IC}{IC}$$

3) Déformation de cisaillement

La **déformation de cisaillement** notée γ est la tangente de la variation d'un angle originellement droit lorsque les côtés, qui sous-tende l'angle tendent vers zéro.

Les trois déformations de cisaillement :

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \tan \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{A'IB'} \right)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \tan \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{B'IC'} \right)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \tan \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{A'IC'} \right)$$

3) Convention de signe

Une **déformation** normale ε est **positive** lorsqu'il y a **allongement**.

Une **déformation** de cisaillement γ est **positive**, lorsque l'angle droit, sous-tendu par les côtés dirigés selon le sens positif d'axes de référence, **diminue**.

VI Relations constitutives

1) Notions de base

Les **relations constitutives** décrivent le **comportement** des matériaux et font intervenir les propriétés du matériau utilisé. On distingue les comportements élastique, plastique et visqueux.

En **R.D.M.**, le comportement élastique des matériaux est le plus désiré.

2) Loi de Hooke

Elle établit une **corrélation** entre la **déformation** suivant une direction et la **contrainte** dans cette direction.



$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

E est le module d'élasticité ou module de Young ou module de rigidité.

3) Loi de Coulomb

Elle établit une **corrélation** entre la déformation de **cisaillement** et la contrainte de cisaillement ou **scission**.



$$\tau = G \cdot \gamma$$

G est le module d'élasticité en cisaillement ou module d'élasticité transversale ou module de Coulomb.

4) Coefficient de Poisson

C'est le **rapport** de la **déformation latérale** à celle de la **direction axiale**.



$$\nu = - \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_L}$$

$$0 \leq \nu \leq 0,5$$

$$\varepsilon_L \geq 0 ; \varepsilon_t \leq 0$$

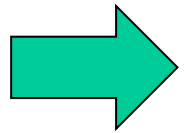
5) Relation entre E et G

Cas d'un milieu **isotrope**. C'est la cas de la plupart des matériaux d'ingénierie.

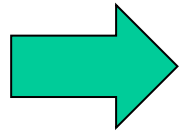


$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

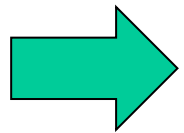
6) Forme généralisé de la loi de Hooke



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)]$$



$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)]$$



$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)]$$